Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций по математике

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ

Москва 2019

Оглавление

9 КЛАСС 3
10 КЛАСС 8
11 КЛАСС 13
ОТБОРОЧНЫЙ ТУР 17
9 КЛАСС 17
10 КЛАСС 19
11 КЛАСС 21

9 КЛАСС

1. В одной из клеток бесконечной клетчатой бумаги находится робот, которому могут быть отданы следующие команды:

- **вверх** (робот перемещается на соседнюю клетку сверху);
- **вниз** (робот перемещается на соседнюю клетку снизу);
- **влево** (робот перемещается на соседнюю клетку слева);
- **вправо** (робот перемещается на соседнюю клетку справа).

Если, например, робот выполнит последовательность из четырех команд (**вверх, вправо, вниз, влево**), то он, очевидно, вернется в исходное положение, т.е. окажется в той же клетке, из которой начал движение. Сколько существует всего различных последовательностей из 4 команд, возвращающих робота в исходное положение?

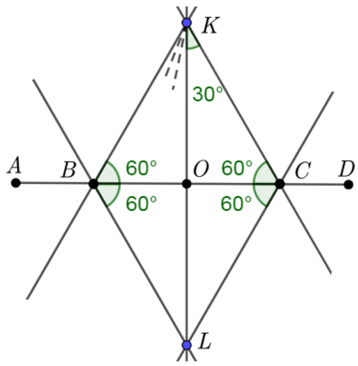
Решение. Для краткости команду **влево** будем обозначать **Л**, **вправо – П**, **вверх – В**, **вниз – Н**. Чтобы робот вернулся в исходное положение необходимо и достаточно, чтобы ему было отдано команд **Л** столько же, сколько и команд **П**, а команд **В** – столько же, сколько и **Н**. Пусть k –количество команд **Л** в последовательности. Подсчитаем количество N_k искомых последовательностей для k от 0 до 2.

- $\boldsymbol{k=0}$. Последовательность состоит только из команд **В** и **Н**. Так как их поровну, то на 2 местах из 4 должна быть команда **В**, а на оставшихся двух – **Н**. Выбрать 2 места из 4 можно C_4^2 способами. Следовательно, $N_0 = C_4^2 = 6$;
- $\boldsymbol{k=1}$. Каждая из команд **Л, П, В, Н** встречается в последовательности ровно 1 раз. Число перестановок из 4 элементов равно 4!. Поэтому $N_1 = 4! = 24$;
- $\boldsymbol{k=2}$. Здесь две **Л**, две **П** и нет команд **В** и **Н**. Две команды **Л** можно разместить C_4^2 способами. Значит $N_2 = C_4^2 = 6$.

Таким образом, искомое число последовательностей равно $N_0 + N_1 + N_2 = 36$.

Ответ: 36.

2. Имеются карандаш, линейка, а также некоторое *специальное устройство*, которое для любого изображенного на плоскости угла строит два луча, делящие этот угол на три равных угла. С помощью этих инструментов постройте на плоскости угол величиной 10^0. (Напомним, что карандашом можно отметить точку плоскости, в частности, точку пересечения двух прямых. Линейка лишь позволяет провести прямую через две отмеченные точки, и никаких «параллельных или перпендикулярных краев» у неё нет.)



Решение. На прямой, проведенной через две различные точки A и D, отметим точки B и C как на рисунке. Разделим развернутые углы ABC и DCB (которые следует представлять себе отложенными сначала в верхнюю, а затем и в нижнюю полуплоскость относительно прямой AD) на три равные части. Получим в результате прямые, образующие угол 60^0 с прямой AD и пересекающиеся в точках K и L. Пусть O – точка пересечения AD и KL. Угол BKO равен, очевидно, 30^0. Разделив его на три части, получим требуемый угол.

Построение выполнено.

3. Действительные числа x, y, z удовлетворяют соотношениям:

$$4x^2 - 2x - 30yz = 25y^2 + 5y + 12xz = 9z^2 - 3z - 20xy.$$

Найдите все возможные тройки чисел (a, b, c), где $a = 2x + 5y, b = 3z + 5y, c = 3z - 2x$.

Решение. Заметим, что

$$a - b + c = 0. \qquad (1)$$

Обозначим $A = 4x^2 - 2x - 30yz,\ B = 25y^2 + 5y + 12xz$ и $C = 9z^2 - 3z - 20xy$. Вычитая друг из друга эти равенства, получим:

$$\begin{aligned} A - B &= a \cdot (2x - 6z - 5y - 1) = 0, \\ B - C &= b \cdot (5y + 4x - 3z + 1) = 0, \\ A - C &= c \cdot (1 - 2x - 10y - 3z) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Предположим, что все три числа a, b, c отличны от нуля. Тогда $2x - 6z - 5y - 1 = 0, 5y + 4x - 3z + 1 = 0$ и $1 - 2x - 10y - 3z = 0$, что невозможно, так как, сложив 2-е равенство с 3-им и вычтя 1-е, получим $3 = 0$. Значит, хотя бы одно из чисел a, b, c равно нулю. Рассмотрим возможные случаи:

1) Все три числа a, b, c равны нулю. Тройка $a = b = c = 0$ очевидно удовлетворяет условиям задачи (достаточно взять $x = y = z = 0$).

2) Среди чисел a, b, c только два равны нулю. Это невозможно: если два числа равны нулю, то, согласно (1), равно нулю и третье.

3) Только одно из чисел a, b, c равно нулю.

- $a = 0$. Тогда $x = -\frac{5y}{2}$. Из системы (2) находим $b = c = 1$;
- $b = 0$. Тогда $a = -c = 1$;
- $c = 0$. Тогда $a = b = -1$.

Ответ: $(0,0,0), (0,1,1), (1,0,-1), (-1,-1,0)$.

4. Найдите все такие функции $f(x)$, которые одновременно удовлетворяют трем условиям: 1) $f(x) > 0$ для любого $x > 0$; 2) $f(1) = 1$; 3) $f(a+b) \cdot \big(f(a) + f(b)\big) = 2f(a) \cdot f(b) + a^2 + +b^2$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

Решение. В тождестве из условия задачи

$$f(a+b) \cdot \big(f(a) + f(b)\big) = 2f(a) \cdot f(b) + a^2 + b^2 \tag{1}$$

положим $a = 1, b = 0$. Тогда $f(1) \cdot \big(f(1) + f(0)\big) = 2f(1) \cdot f(0) + 1$. Поскольку $f(1) = 1$, находим

$$f(0) = 0. \tag{2}$$

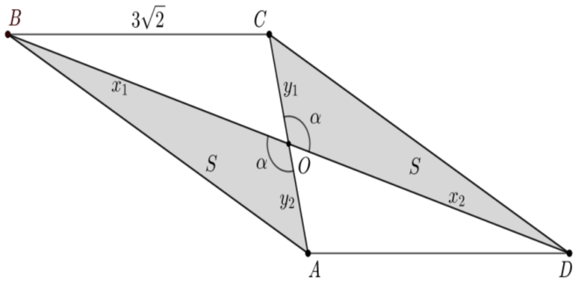
Положив затем $b = -a$ в (1), получим, с учетом (2), что

$$f(a) \cdot f(-a) = -a^2. \tag{3}$$

Наконец, при $b = 0$ тождество (1) (с учетом (2)) примет вид $f(a) \cdot f(a) = a^2$. Значит необходимо, чтобы $f(a) = a$ при $a > 0$, так как по условию $f(x) > 0$ для $x > 0$. Далее, согласно (3), $f(a) = a$ и при $a < 0$. Окончательно, $f(x) = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Легко убедиться, что такая $f(x)$ действительно удовлетворяет требованиям 1), 2), 3) из условия задачи.

Ответ: $f(x) = x$.

5. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Известно, что $S_{ABO} = S_{CDO} = \frac{3}{2}$ $BC = 3\sqrt{2}$, $\cos\angle ADC = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Найдите синус угла между диагоналями этого четырехугольника, если его площадь принимает наименьшее возможное значение при данных условиях.



Решение. Докажем, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм. Пусть x_1, x_2, y_1, y_2 – отрезки, на которые диагонали делятся их точкой пересечения. Обозначим угол между диагоналями через α. По условию площади треугольников ABO и CDO равны, то есть $\frac{1}{2}x_1 y_2 \sin\alpha = \frac{1}{2}x_2 y_1 \sin\alpha$. Отсюда $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$, и, следовательно, треугольники BOC и AOD подобны по первому признаку подобия: две стороны (x_1 и y_1) треугольника BOC пропорциональны двум сторонам (x_2 и y_2) треугольника AOD, а углы, образованные этими сторонами ($\angle BOC$ и $\angle AOD$), равны. Пусть $k = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ – коэффициент подобия треугольников BOC и AOD. Обозначим через S площади треугольников ABO и CDO (по условию $S = \frac{3}{2}$). Тогда $S_{BOC} = k \cdot S$ и $S_{AOD} = S/k$. В итоге, площадь четырехугольника $ABCD$ может быть представлена в виде:

$$S_{ABCD}=S_{AOD}+S_{CDO}+S_{BOC}+S_{ABO}=2S+S\left(k+\frac{1}{k}\right).$$

Известно, что для $k>0$ минимальное значение выражения $k+\frac{1}{k}$ достигается при $k=1$. Значит, $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$, то есть диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, поэтому $ABCD$ – параллелограмм. Его площадь $S_{ABCD}=4S=6$.

Для нахождения синуса угла между диагоналями воспользуемся тем, что площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними:

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot\sin\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\frac{2S_{ABCD}}{AC\cdot BD}. \qquad (1)$$

Чтобы найти длины диагоналей, вычислим сторону CD, записав формулу для площади параллелограмма

$$S_{ABCD}=4S=AD\cdot CD\cdot\sin\angle ADC\Rightarrow CD=\frac{4S}{AD\cdot\sin\angle ADC}=\frac{4\cdot\frac{3}{2}}{3\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2}}=2\sqrt{5}.$$

Теперь найдем диагонали AC и BD по теореме косинусов из треугольников ADC иBCD

$$AC=\sqrt{AD^2+CD^2-2\cdot AD\cdot CD\cdot\ \cos\angle ADC}=\sqrt{2},$$
$$BD=\sqrt{AD^2+CD^2+2\cdot AD\cdot CD\cdot\ \cos\angle ADC}=\sqrt{74}.$$

Подставив найденные значения в соотношение (1), получим $\sin\alpha=\frac{6}{\sqrt{37}}$.

Ответ: $\frac{6}{\sqrt{37}}$.

6. Найдите все простые числа, десятичная запись которых имеет вид $101010\ldots01$.

Решение. Пусть $2n+1$ – количество цифр в исследуемом числе $A=101010\ldots101$. Пусть $q=10$ – основание системы счисления. Тогда $A=q^0+q^2+\cdots q^{2n}=\frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1}$. Рассмотрим случаи четного и нечетного n.

- $n=2k\Rightarrow A=\frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1}=\frac{q^{2k+1}-1}{q-1}\cdot\frac{q^{2k+1}+1}{q+1}$. Таким образом, число A представлено в виде произведения двух целых сомножителей (по теореме Безу многочлен $q^{2k+1}\pm1$ делится без остатка на многочлен $q\pm1$), каждый из которых отличен от 1. Значит, при четных n число A простым не является.
- $n=2k-1\Rightarrow A=\frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1}=\frac{q^{2k}-1}{q^2-1}\cdot(q^{2k}+1)$. При $k>1$ оба сомножителя целые и отличны от 1; значит, число A составное. Остается убедиться, что при $k=1$ получается простое число $A=q^0+q^2=101$.

Ответ: 101.

7. Обыкновенная дробь $\frac{1}{221}$ представлена в виде периодической десятичной дроби. Найдите длину периода. (Например, длина периода дроби $\frac{25687}{99900}=0{,}25712712712\ldots=0{,}25(712)$ равна 3.)

Решение. Рассмотрим пример. Переведем обыкновенную дробь $\frac{34}{275}$ в десятичную. Для этого выполним деление уголком (рис.). В результате найдем $\frac{34}{275}=0{,}123636363\ldots=0{,}123(63)$. Получена непериодическая часть 123 и период 63. Обсудим, почему непериодическая часть здесь возникла, и покажем, что у дроби $\frac{1}{221}$ ее нет. Дело в том, что в десятичной записи дроби $\frac{34}{275}$ цифра 3 появляется всякий раз, когда при очередном делении на 275 получается остаток 100. Мы видим (и это ключевой момент!), что здесь один и тот же остаток 100 дают *различные* числа: 650 и 1750. Откуда, в свою очередь, взялись эти 650 и 1750? Число 650 получилось дописыванием нуля к числу $r_1=65$ (остатку от деления на 275 числа 340). То есть $10r_1 = 650$. Аналогично, $10r_2 = 1750$, где $r_2 = 175$. Числа 650 и 1750 дают одинаковые остатки при делении на 275 из-за того, что их разность на 275 делится нацело: $1750 - 650 = 10(r_2 - r_1) \vdots 275$. Такое возможно только потому, что числа 10 и 275 не взаимно просты. Теперь понятно, почему у дроби $\frac{1}{221}$ непериодической части не будет: если r_1 и r_2 – это различные остатки от деления на 221, то произведение $10(r_2 - r_1)$ на 221 нацело не делится (число 221, в отличие от 275, взаимно просто с 10 – основанием системы счисления, поэтому непериодической части нет).

```
-34  | 275
 275 |0,12363...
 -650
  550
 -1000
   825
  -1750
   1650
   -1000
     825
    -1750
      ...
```

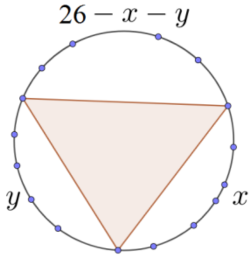
Итак, десятичная запись дроби $\frac{1}{221}$ имеет вид $\frac{1}{221} = 0,(a_1 a_2 \dots a_n)$. Найдем n. Обозначим $A = a_1 a_2 \dots a_n$. Тогда $\frac{1}{221} = 10^{-n} \cdot A + 10^{-2n} \cdot A + \cdots$. По формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{221} = \frac{A}{10^n - 1}$. Отсюда $A = \frac{10^n - 1}{221}$. Поскольку A – натуральное число, требуется найти (наименьшее) натуральное n, при котором число 10^n дает остаток 1 при делении на 221.

Заметим, что $221 = 13 \cdot 17$. Вообще, целое число B (у нас $B = 10^n$) при делении на 221 дает остаток 1 в том и только том случае, когда B при делении и на 13, и на 17 также дает остаток 1. Необходимость очевидна. Достаточность: если $B = 13k_1 + 1$ и $B = 17k_2 + 1$, то $13k_1 = 17k_2$, а значит число k_1 делится на 17, то есть $k_1 = 17m$. Поэтому $B = 13 \cdot 17m + 1$, и при делении на 221 действительно получается остаток 1. Найдем теперь такие n, что число 10^n дает остаток 1 при делении на 13. Рассмотрим последовательность $b_n = 10^n$. Заменим ее члены остатками от деления на 13. Получится вот что: $b_1 = 10, b_2 = 9, b_3 = 13, b_4 = 3, b_5 = 4, b_6 = 1, \dots$ Каждый последующий член однозначно определяется предыдущим. Значит, $\{b_n\}$ – периодическая последовательность, в которой каждый шестой член равен 1. То же проделаем для 17. Там единице будет равен каждый 16-й член. Таким образом, остаток 1 при делении и на 13, и на 17 получится при $n = \text{НОК}(6,16) = 48$.

Ответ: 48.

8. Аня с Борей играют в «морской бой» по следующим правилам: на окружности выбираются 29 различных точек, пронумерованных по часовой стрелке натуральными числами от 1 до 29. Аня рисует корабль – произвольный треугольник с вершинами в этих точках. Будем называть «выстрелом» выбор двух различных натуральных чисел k и m от 1 до 29. Если отрезок с концами в точках с номерами k и m имеет с треугольником Ани хотя бы одну общую точку, то корабль считается «раненым». Боря производит «залп» – несколько выстрелов одновременно. Аня нарисовала корабль и показала его Боре. И тут они заметили, что любой «залп» из K различных выстрелов *обязательно* ранит корабль Ани. Укажите какое-нибудь расположение корабля Ани, при котором значение K будет минимальным.

Решение. Вершины треугольника Ани делят окружность на три дуги (рис.). Пусть x, y и $26 - x - y$ –количество точек на этих дугах (рис.), не считая вершины самого треугольника. Чтобы «выстрел» с концами в точках k и m не задел корабль, надо чтобы обе эти точки лежали на одной из дуг. Выбрать две различные точки на дуге, содержащей x точек, можно, очевидно, C_x^2 способами. То же и для остальных дуг. Значит число N «безопасных» выстрелов равно сумме $N = C_x^2 + C_y^2 + C_{26-x-y}^2$. Тогда следующий выстрел уже обязательно «ранит» корабль, поэтому $K = N + 1$.



Итак, требуется найти такие целые неотрицательные числа x, y, удовлетворяющие условию $x + y \leq 26$, при которых значение N минимально. Запишем выражение для N в развернутом виде:

$$N = \frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} + \frac{(26-x-y)(25-x-y)}{2}.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим

$$N = x^2 - x(26 - y) + y^2 - 26y + 325. \qquad (1)$$

При каждом фиксированном y от 0 до 26 будем искать такое значение x, удовлетворяющее неравенству

$$0 \leq x \leq 26 - y, \qquad (2)$$

при котором значение N минимально. Если y фиксирован, то правая часть (1) принимает минимальное значение при

$$x = \frac{26-y}{2} \qquad (3)$$

(вершина параболы, принадлежащая промежутку (2)). Это минимальное значение равно $\frac{3}{4}y^2 - 13y + 156$. Оно, в свою очередь, минимально при $y = \frac{26}{3} \approx 8{,}6$. Из (3) тогда находим $x = \frac{26}{3}$. Среди точек с целыми координатами $(8{,}8), (8{,}9), (9{,}8), (9{,}9)$ – ближайших целочисленных соседей точки минимума $\left(\frac{26}{3}, \frac{26}{3}\right)$ – выбираем ту, которой соответствует наименьшее значение N. Это точки $(8{,}9), (9{,}8), (9{,}9)$. Для них $N = 100$.

Ответ: Корабль следует расположить так, чтобы на трех дугах, на которые вершины корабля разбивают окружность, располагалось по 8, 9 и 9 точек (не считая вершины самого корабля).

10 КЛАСС

1. Действительные числа x, y, z удовлетворяют соотношениям:

$$4x^2 - 2x - 30yz = 25y^2 + 5y + 12xz = 9z^2 - 3z - 20xy.$$

Найдите все возможные тройки чисел (a, b, c), где $a = 2x + 5y, b = 3z + 5y, c = 3z - 2x$.

Решение. Заметим, что

$$a - b + c = 0. \qquad (1)$$

Обозначим $A = 4x^2 - 2x - 30yz,\ B = 25y^2 + 5y + 12xz$ и $C = 9z^2 - 3z - 20xy$. Вычитая друг из друга эти равенства, получим

$$\begin{gathered} A - B = a \cdot (2x - 6z - 5y - 1) = 0, \\ B - C = b \cdot (5y + 4x - 3z + 1) = 0, \\ A - C = c \cdot (1 - 2x - 10y - 3z) = 0. \end{gathered} \qquad (2)$$

Предположим, что все три числа a, b, c отличны от нуля. Тогда $2x - 6z - 5y - 1 = 0, 5y + +4x - 3z + 1 = 0$ и $1 - 2x - 10y - 3z = 0$, что невозможно, так как, сложив 2-е равенство с 3-им и вычтя 1-е, получим $3 = 0$. Значит, хотя бы одно из чисел a, b, c равно нулю. Рассмотрим возможные случаи:

1) Все три числа a, b, c равны нулю. Тройка $a = b = c = 0$ очевидно удовлетворяет условиям задачи (достаточно взять $x = y = z = 0$).

2) Среди чисел a, b, c только два равны нулю. Это невозможно: если два числа равны нулю, то, согласно (1), равно нулю и третье.

3) Только одно из чисел a, b, c равно нулю.

- $a = 0$. Тогда $x = -\frac{5y}{2}$. Из системы (2) находим $b = c = 1$;
- $b = 0$. Тогда $a = -c = 1$;
- $c = 0$. Тогда $a = b = -1$.

Ответ: $(0,0,0), (0,1,1), (1,0,-1), (-1,-1,0)$.

2. Найдите все такие функции $f(x)$, которые одновременно удовлетворяют трем условиям: 1) $f(x) > 0$ для любого $x > 0$; 2) $f(1) = 1$; 3) $f(a + b) \cdot \big(f(a) + f(b)\big) = 2f(a) \cdot f(b) + +a^2 + b^2$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

Решение. В тождестве из условия задачи

$$f(a + b) \cdot \big(f(a) + f(b)\big) = 2f(a) \cdot f(b) + a^2 + b^2 \qquad (1)$$

положим $a = 1, b = 0$. Тогда $f(1) \cdot \big(f(1) + f(0)\big) = 2f(1) \cdot f(0) + 1$. Поскольку $f(1) = 1$, находим

$$f(0) = 0. \qquad (2)$$

Положив затем $b = -a$ в (1), получим, с учетом (2), что

$$f(a) \cdot f(-a) = -a^2. \qquad (3)$$

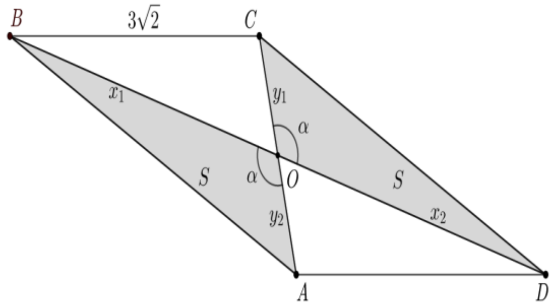
Наконец, при $b = 0$ тождество (1) (с учетом (2)) примет вид $f(a) \cdot f(a) = a^2$. Значит необходимо, чтобы $f(a) = a$ при $a > 0$, так как по условию $f(x) > 0$ для $x > 0$. Далее, согласно (3), $f(a) = a$ и при $a < 0$. Окончательно, $f(x) = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Легко убедиться, что такая $f(x)$ действительно удовлетворяет требованиям 1), 2), 3) из условия задачи.

Ответ: $f(x) = x$.

3. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Известно, что $S_{ABO} = S_{CDO} = \frac{3}{2}BC = 3\sqrt{2}$, $\cos\angle ADC = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Найдите синус угла между диагоналями этого четырехугольника, если его площадь принимает наименьшее возможное значение при данных условиях.

Решение. Докажем, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм. Пусть x_1, x_2, y_1, y_2 – отрезки, на которые диагонали делятся их точкой пересечения. Обозначим угол между диагоналями через α. По условию площади треугольников ABO и CDO равны, то есть $\frac{1}{2}x_1y_2\sin\alpha = \frac{1}{2}x_2y_1\sin\alpha$. Отсюда $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$, и, следовательно, треугольники BOC и AOD подобны по первому признаку подобия: две стороны (x_1 и

y_1) треугольника BOC пропорциональны двум сторонам (x_2 и y_2) треугольника AOD, а углы, образованные этими сторонами ($\angle BOC$ и $\angle AOD$), равны. Пусть $k = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ – коэффициент подобия треугольников BOC и AOD. Обозначим через S площади треугольников ABO и CDO (по условию $S = \frac{3}{2}$). Тогда $S_{BOC} = k \cdot S$ и $S_{AOD} = S/k$. В итоге, площадь четырехугольника $ABCD$ может быть представлена в виде: $S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{CDO} + S_{BOC} + S_{ABO} = 2S + S\left(k + \frac{1}{k}\right)$.



Известно, что для $k > 0$ минимальное значение выражения $k + \frac{1}{k}$ достигается при $k = 1$. Значит, $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, то есть диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, поэтому $ABCD$ – параллелограмм. Его площадь $S_{ABCD} = 4S = 6$.

Для нахождения синуса угла между диагоналями воспользуемся тем, что площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2S_{ABCD}}{AC \cdot BD}. \qquad (1)$$

Чтобы найти длины диагоналей, вычислим прежде сторону CD, записав формулу для площади параллелограмма

$$S_{ABCD} = 4S = AD \cdot CD \cdot \sin\angle ADC \Rightarrow CD = \frac{4S}{AD \cdot \sin\angle ADC} = \frac{4 \cdot \frac{3}{2}}{3\sqrt{2}\sqrt{1 - \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2}} = 2\sqrt{5}.$$

Теперь найдем диагонали AC и BD по теореме косинусов из треугольников ADC и BCD:

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos\angle ADC} = \sqrt{2},$$
$$BD = \sqrt{AD^2 + CD^2 + 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos\angle ADC} = \sqrt{74}.$$

Подставив найденные значения в соотношение (1), получим $\sin\alpha = \frac{6}{\sqrt{37}}$.

Ответ: $\frac{6}{\sqrt{37}}$.

4. В одной из клеток бесконечной клетчатой бумаги находится робот, которому могут быть отданы следующие команды:

- **вверх** (робот перемещается на соседнюю клетку сверху);
- **вниз** (робот перемещается на соседнюю клетку снизу);
- **влево** (робот перемещается на соседнюю клетку слева);
- **вправо** (робот перемещается на соседнюю клетку справа).

Если, например, робот выполнит последовательность из четырех команд (**вверх, вправо, вниз, влево**), то он, очевидно, вернется в исходное положение, т.е. окажется в той же клетке, из которой начал движение. Сколько существует различных последовательностей из 8 команд, возвращающих робота в исходное положение?

Решение. Для краткости команду **влево** будем обозначать **Л**, **вправо – П**, **вверх – В**, **вниз – Н**. Чтобы робот вернулся в исходное положение необходимо и достаточно, чтобы ему было отдано команд **Л** столько же, сколько и команд **П**, а команд **В** – столько же, сколько и **Н**. Пусть k – количество команд **Л** в последовательности. Подсчитаем количество N_k искомых последовательностей для k от 0 до 4.

- $\boldsymbol{k = 0}$. Последовательность состоит только из команд **В** и **Н**. Так как их поровну, то на 4 местах из 8 должна быть команда **В**, а на остальных – **Н**. Выбрать 4 места из 8 можно C_8^4 способами. Следовательно, $N_0 = C_8^4 = 70$;

- $\boldsymbol{k=1}$. Последовательность состоит из одной команды **Л**, одной **П**, а также трех **В** и трех **Н**. Разместить две команды **Л** и **П** на 8 позициях можно $C_8^2 \cdot C_2^1$ способами: C_8^2 – число способов вообще выбрать 2 позиции из 8, $C_2^1 = 2$ – число способов разместить на этих двух позициях команды **Л** и **П**. На оставшихся 6 позициях следует разместить 3 команды **В**, что можно сделать C_6^3 способами. Поэтому $N_1 = C_8^2 \cdot C_2^1 \cdot C_6^3 = 1120$;
- $\boldsymbol{k=2}$. Здесь две **Л**, две **П,** а также по 2 команды **В** и **Н**. Для **Л** и **П** имеем $C_8^4 \cdot C_4^2$ вариантов размещения. На оставшихся 4 позициях разместить 2 команды **В** можно C_4^2 способами. Значит $N_2 = C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2 = 2520$.

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что $N_3 = N_1$ и $N_4 = N_0$. Таким образом, искомое число последовательностей равно $2 \cdot (N_0 + N_1) + N_2 = 4900$.

Ответ: 4900.

5. Найдите все простые числа, десятичная запись которых имеет вид $101010 \dots 101$ (единицы и нули чередуются).

Решение: Пусть $2n+1$ – количество цифр в исследуемом числе $A = 101010 \dots 101$. Пусть $q = 10$ – основание системы счисления. Тогда $A = q^0 + q^2 + \cdots q^{2n} = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1}$. Рассмотрим случаи четного и нечетного n.

- $n = 2k \Rightarrow A = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1} = \frac{q^{2k+1}-1}{q-1} \cdot \frac{q^{2k+1}+1}{q+1}$. Таким образом, число A представлено в виде произведения двух целых сомножителей (по теореме Безу многочлен $q^{2k+1} \pm 1$ делится без остатка на многочлен $q \pm 1$), каждый из которых отличен от 1. Значит, при четных n число A простым не является.
- $n = 2k-1 \Rightarrow A = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1} = \frac{q^{2k}-1}{q^2-1} \cdot (q^{2k}+1)$. При $k > 1$ оба сомножителя целые и отличны от 1; значит, число A составное. Остается убедиться, что при $k = 1$ получается простое число $A = q^0 + q^2 = 101$.

Ответ: 101.

6. Найдите какие-нибудь целые числа A и B, для которых выполняется неравенство $0{,}999 < A + B \cdot \sqrt{2} < 1$.

Решение: Заметим, что если число вида $x + y \cdot \sqrt{2}$, где x, y целые, возвести в целую неотрицательную степень n, то вновь получим число такого же вида, т.е. $\left(x + y \cdot \sqrt{2}\right)^n = x_1 + y_1 \cdot \sqrt{2}$, где x_1 и y_1 опять же целые. Положительное число $\sqrt{2} - 1$, очевидно, меньше 1. Значит, возводя его в достаточно большую степень, можно получить число сколь угодно малое. Найдем такое натуральное n, что $\left(\sqrt{2}-1\right)^n < 0{,}001$. Поскольку $\left(\sqrt{2}-1\right)^n < \frac{1}{2^n}$, то, очевидно, достаточно взять $n = 10$, так как $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} < \frac{1}{1000} = 0{,}001$. Остается возвести $\sqrt{2} - 1$ в 10-ю степень. Находим: $\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$, $\left(\sqrt{2}-1\right)^4 = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^2 = 17 - 12\sqrt{2}$, $\left(\sqrt{2}-1\right)^8 = \left(17 - 12\sqrt{2}\right)^2 = 577 - 408\sqrt{2}$, $\left(\sqrt{2}-1\right)^{10} = \left(\sqrt{2}-1\right)^8 \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)^2 = \left(577 - 408\sqrt{2}\right) \cdot \left(3 - 2\sqrt{2}\right) = 3363 - 2378\sqrt{2}$. Таким образом, $0{,}999 < 1 - \left(\sqrt{2}-1\right)^{10} < 1$, поэтому можно взять $A = -3362, B = 2378$.

Ответ: Например, $A = -3362, B = 2378$. **Замечание.** *Приведенная в решении оценка очень грубая. На самом деле, уже*

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^8 = 577 - 408\sqrt{2} \approx 0{,}000867 < 0{,}001. \text{ *Но* } \left(\sqrt{2}-1\right)^7 \approx 0{,}002 > 0{,}001.$$

7. Обыкновенная дробь $\frac{1}{221}$ представлена в виде периодической десятичной дроби. Найдите длину периода. (Например, длина периода дроби $\frac{25687}{99900} = 0{,}25712712712\ldots = 0{,}25(712)$ равна 3.)

Решение. Рассмотрим пример. Переведем обыкновенную дробь $\frac{34}{275}$ в десятичную. Для этого выполним деление уголком (рис.). В результате найдем $\frac{34}{275} = 0{,}123636363\ldots = 0{,}123(63)$. Получена непериодическая часть 123 и период 63. Обсудим, почему непериодическая часть здесь возникла, и покажем, что у дроби $\frac{1}{221}$ ее нет. Дело в том, что в десятичной записи дроби $\frac{34}{275}$ цифра 3 появляется всякий раз, когда при очередном делении на 275 получается остаток 100. Мы видим (и это ключевой момент!), что здесь один и тот же остаток 100 дают *различные* числа: 650 и 1750. Откуда, в свою очередь, взялись эти 650 и 1750? Число 650 получилось дописыванием нуля к числу $r_1 = 65$ (остатку от деления на 275 числа 340). То есть $10r_1 = 650$. Аналогично, $10r_2 = 1750$, где $r_2 = 175$. Числа 650 и 1750 дают одинаковые остатки при делении на 275 из-за того, что их разность на 275 делится нацело: $1750 - 650 = 10(r_2 - r_1) \vdots 275$. Такое возможно только потому, что числа 10 и 275 не взаимно просты. Теперь понятно, почему у дроби $\frac{1}{221}$ непериодической части не будет: если r_1 и r_2 – это различные остатки от деления на 221, то произведение $10(r_2 - r_1)$ на 221 нацело не делится (число 221, в отличие от 275, взаимно просто с 10 – основанием системы счисления, поэтому непериодической части нет).

```
-34    | 275
 275   |0,12363...
 -650
  550
 -1000
   825
  -1750
   1650
   -1000
     825
    -1750
      ...
```

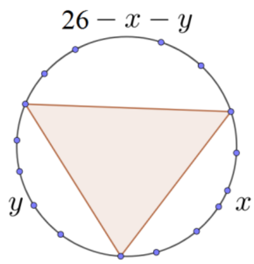
Итак, десятичная запись дроби $\frac{1}{221}$ имеет вид $\frac{1}{221} = 0,(a_1 a_2 \ldots a_n)$. Найдем n. Обозначим $A = a_1 a_2 \ldots a_n$. Тогда $\frac{1}{221} = 10^{-n} \cdot A + 10^{-2n} \cdot A + \cdots$. По формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{221} = \frac{A}{10^n - 1}$. Отсюда $A = \frac{10^n - 1}{221}$. Поскольку A – натуральное число, требуется найти (наименьшее) натуральное n, при котором число 10^n дает остаток 1 при делении на 221.

Заметим, что $221 = 13 \cdot 17$. Вообще, целое число B (у нас $B = 10^n$) при делении на 221 дает остаток 1 в том и только том случае, когда B при делении и на 13, и на 17 также дает остаток 1. Необходимость очевидна. Достаточность: если $B = 13k_1 + 1$ и $B = 17k_2 + 1$, то $13k_1 = 17k_2$, а значит число k_1 делится на 17, то есть $k_1 = 17m$. Поэтому $B = 13 \cdot 17m + 1$, и при делении на 221 действительно получается остаток 1. Найдем теперь такие n, что число 10^n дает остаток 1 при делении на 13. Рассмотрим последовательность $b_n = 10^n$. Заменим ее члены остатками от деления на 13. Получится вот что: $b_1 = 10, b_2 = 9, b_3 = 13, b_4 = 3, b_5 = 4, b_6 = 1, \ldots$ Каждый последующий член однозначно определяется предыдущим. Значит, $\{b_n\}$ – периодическая последовательность, в которой каждый шестой член равен 1. То же проделаем для 17. Там единице будет равен каждый 16-й член. Таким образом, остаток 1 при делении и на 13, и на 17 получится при $n = \text{НОК}(6{,}16) = 48$.

Ответ: 48.

8. Аня с Борей играют в «морской бой» по следующим правилам: на окружности выбираются 29 различных точек, пронумерованных по часовой стрелке натуральными числами от 1 до 29. Аня рисует корабль – произвольный треугольник с вершинами в этих точках. Будем называть «выстрелом» выбор двух различных натуральных чисел k и m от 1 до 29. Если отрезок с концами в точках с номерами k и m имеет с треугольником Ани хотя бы одну общую точку, то корабль считается «раненым». Боря производит «залп» – несколько выстрелов одновременно. Аня нарисовала корабль и показала его Боре. И тут они заметили, что любой «залп» из K различных выстрелов обязательно ранит корабль Ани. Укажите какое-нибудь расположение корабля Ани, при котором значение K будет минимальным.

Решение. Вершины треугольника Ани делят окружность на три дуги. Пусть x, y и $26-x-y$ – количество точек на этих дугах (рис.), не считая вершины самого треугольника. Чтобы «выстрел» с концами в точках k и m не задел корабль, надо чтобы обе эти точки лежали на одной из дуг. Выбрать две различные точки на дуге, содержащей x точек, можно, очевидно, C_x^2 способами. То же и для остальных дуг. Значит число N «безопасных» выстрелов равно сумме $N = C_x^2 + C_y^2 + C_{26-x-y}^2$. Тогда следующий выстрел уже обязательно «ранит» корабль, поэтому $K = N + 1$.



Итак, требуется найти такие целые неотрицательные числа x, y, удовлетворяющие условию $x + y \le 26$, при которых значение N минимально. Запишем выражение для N в развернутом виде:

$$N = \frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} + \frac{(26-x-y)(25-x-y)}{2}.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим

$$N = x^2 - x(26-y) + y^2 - 26y + 325. \qquad (1)$$

При каждом фиксированном y от 0 до 26 будем искать такое значение x, удовлетворяющее неравенству

$$0 \le x \le 26 - y, \qquad (2)$$

при котором значение N минимально. Если y фиксирован, то правая часть (1) принимает минимальное значение при

$$x = \frac{26-y}{2} \qquad (3)$$

(вершина параболы, принадлежащая промежутку (2)).

Это минимальное значение равно $\frac{3}{4}y^2 - 13y + 156$. Оно, в свою очередь, минимально при $y = \frac{26}{3} \approx 8{,}6$. Из (3) тогда находим $x = \frac{26}{3}$. Среди точек с целыми координатами $(8{,}8), (8{,}9), (9{,}8), (9{,}9)$ – ближайших целочисленных соседей точки минимума $\left(\frac{26}{3}, \frac{26}{3}\right)$ – выбираем ту, которой соответствует наименьшее значение N. Это точки $(8{,}9), (9{,}8), (9{,}9)$. Для них $N = 100$.

Ответ: Корабль следует расположить так, чтобы на трех дугах, на которые вершины корабля разбивают окружность, располагалось по 8, 9 и 9 точек (не считая вершины самого корабля).

11 КЛАСС

1. Найдите все такие функции $f(x)$, которые одновременно удовлетворяют трем условиям
1) $f(x) > 0$ для любого $x > 0$;
2) $f(1) = 1$;
3) $f(a+b)\cdot(f(a)+f(b)) = 2f(a)\cdot f(b) + +a^2 + b^2$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

Решение. В тождестве из условия задачи
$$f(a+b)\cdot\big(f(a)+f(b)\big) = 2f(a)\cdot f(b) + a^2 + b^2 \qquad (1)$$
положим $a = 1, b = 0$. Тогда $f(1)\cdot\big(f(1)+f(0)\big) = 2f(1)\cdot f(0) + 1$. Поскольку $f(1) = 1$, находим
$$f(0) = 0. \qquad (2)$$
Положив затем $b = -a$ в (1), получим, с учетом (2), что
$$f(a)\cdot f(-a) = -a^2. \qquad (3)$$
Наконец, при $b = 0$ тождество (1) (с учетом (2)) примет вид $f(a)\cdot f(a) = a^2$. Значит необходимо, чтобы $f(a) = a$ при $a > 0$, так как по условию $f(x) > 0$ для $x > 0$. Далее, согласно (3), $f(a) = a$ и при $a < 0$. Окончательно, $f(x) = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Легко убедиться, что такая $f(x)$ действительно удовлетворяет требованиям 1), 2), 3) из условия задачи.

Ответ: $f(x) = x$.

2. Найдите какие-нибудь целые числа A и B, для которых выполняется неравенство
$$0{,}999 < A + B\cdot\sqrt{2} < 1.$$

Решение. Заметим, что если число вида $x + y\cdot\sqrt{2}$, где x, y целые, возвести в целую неотрицательную степень n, то вновь получим число такого же вида, т.е. $\left(x + y\cdot\sqrt{2}\right)^n = x_1 + y_1\cdot\sqrt{2}$, где x_1 и y_1 опять же целые. Положительное число $\sqrt{2} - 1$, очевидно, меньше 1. Значит, возводя его в достаточно большую степень, можно получить число сколь угодно малое. Найдем такое натуральное n, что $\left(\sqrt{2}-1\right)^n < 0{,}001$. Поскольку $\left(\sqrt{2}-1\right)^n < \frac{1}{2^n}$, то, очевидно, достаточно взять $n = 10$, так как $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} < \frac{1}{1000} = 0{,}001$. Остается возвести $\sqrt{2}-1$ в 10-ю степень. Находим: $\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$, $\left(\sqrt{2}-1\right)^4 = \left(3-2\sqrt{2}\right)^2 = 17 - 12\sqrt{2}$, $\left(\sqrt{2}-1\right)^8 = \left(17-12\sqrt{2}\right)^2 = 577 - 408\sqrt{2}$, $\left(\sqrt{2}-1\right)^{10} = \left(\sqrt{2}-1\right)^8\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = \left(577-408\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right) = 3363 - 2378\sqrt{2}$. Таким образом, $0{,}999 < 1 - \left(\sqrt{2}-1\right)^{10} < 1$. Поэтому можно взять $A = -3362, B = 2378$.

Ответ: Например, $A = -3362, B = 2378$.

Замечание. *Приведенная в решении оценка очень грубая. На самом деле, уже* $\left(\sqrt{2}-1\right)^8 == 577 - 408\sqrt{2} \approx 0{,}000867 < 0{,}001$. *Но* $\left(\sqrt{2}-1\right)^7 \approx 0{,}002 > 0{,}001$.

3. Аня с Борей играют в «морской бой» по следующим правилам: на окружности выбираются 29 различных точек, пронумерованных по часовой стрелке натуральными числами от 1 до 29. Аня рисует корабль – произвольный треугольник с вершинами в этих точках. Боря (не зная расположение корабля Ани) производит «выстрел»: он называет два различных натуральных числа k и m от 1 до 29, и, если отрезок с концами в точках с номерами k и m, совпадает с одной из сторон треугольника Ани, то корабль считается «раненым». Сможет ли Боря, играя обдуманно, гарантированно «ранить» корабль, где бы Аня его ни расположила, сделав не более 134 выстрелов?

Решение: Всего имеется $C_{29}^3 = 3654$ различных треугольников. Один выстрел «ранит» 27 треугольников. Сделав 134 выстрела, удастся «ранить» не более $134\cdot 27 = 3618$ треугольников. Так как $C_{29}^3 > 134\cdot 27$, то 134 выстрелов не хватит, чтобы гарантированно «ранить» корабль.

Ответ: Не сможет.

4. Известно, что уравнение $x^3 - x - 1 = 0$ имеет единственный действительный корень x_0. Придумайте хотя бы одно уравнение вида

$$a \cdot z^3 + b \cdot z^2 + c \cdot z + d = 0,$$

где a, b, c, d – целые числа и $a \neq 0$, одним из корней которого было бы число

$$z = x_0^2 + 3 \cdot x_0 + 1.$$

Решение: Запишем соотношения

$$z = x_0^2 + 3 \cdot x_0 + 1$$
$$z \cdot x_0 = x_0^3 + 3 \cdot x_0^2 + x_0$$
$$z \cdot x_0^2 = x_0^4 + 3 \cdot x_0^3 + x_0^2.$$

Правые части можно упростить (привести по модулю $x_0^3 - x_0 - 1$), воспользовавшись тем, что $x_0^3 = x_0 + 1$. В результате получим

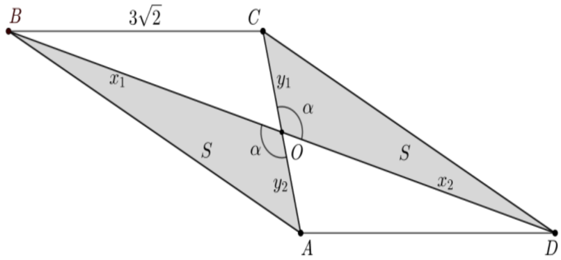
$$z = x_0^2 + 3 \cdot x_0 + 1$$
$$z \cdot x_0 = 3 \cdot x_0^2 + 2 \cdot x_0 + 1$$
$$z \cdot x_0^2 = 2 \cdot x_0^2 + 4 \cdot x_0 + 3.$$

Первые два равенства можно рассматривать как систему линейных уравнений с двумя неизвестными x_0 и x_0^2. Решив ее, найдем $x_0 = \frac{3z-2}{z+7}, x_0^2 = \frac{z^2-3z-1}{z+7}$. Подставив эти соотношения в последнее равенство, получим искомое уравнение относительно z.

Ответ: Например, $z^3 - 5z^2 - 10z - 11 = 0$.

5. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Известно, что $S_{ABO} = S_{CDO} = \frac{3}{2}$, $BC = 3\sqrt{2}$, $\cos\angle ADC = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Найдите синус угла между диагоналями этого четырехугольника, если его площадь принимает наименьшее возможное значение при данных условиях.

Решение. Докажем, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм. Пусть x_1, x_2, y_1, y_2 – отрезки, на которые диагонали делятся их точкой пересечения. Обозначим угол между диагоналями через α. По условию площади треугольников ABO и CDO равны, то есть $\frac{1}{2}x_1y_2\sin\alpha = \frac{1}{2}x_2y_1\sin\alpha$. Отсюда $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$, и, следовательно, треугольники BOC и AOD подобны по первому признаку подобия: две стороны (x_1 и y_1) треугольника BOC пропорциональны двум сторонам (x_2 и y_2) треугольника AOD, а углы, образованные этими сторонами ($\angle BOC$ и $\angle AOD$), равны. Пусть $k = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ – коэффициент подобия треугольников BOC и AOD. Обозначим через S площади треугольников ABO и CDO (по условию $S = \frac{3}{2}$). Тогда $S_{BOC} = k \cdot S$ и $S_{AOD} = S/k$. В итоге, площадь четырехугольника $ABCD$ может быть представлена в виде



$$S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{CDO} + S_{BOC} + S_{ABO} = 2S + S\left(k + \frac{1}{k}\right).$$

Известно, что для $k > 0$ минимальное значение выражения $k + \frac{1}{k}$ достигается при $k = 1$. Значит, $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, то есть диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, поэтому $ABCD$ – параллелограмм. Его площадь $S_{ABCD} = 4S = 6$.

Для нахождения синуса угла между диагоналями воспользуемся тем, что площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2S_{ABCD}}{AC \cdot BD}. \qquad (1)$$

Чтобы найти длины диагоналей, вычислим прежде сторону CD, записав формулу для площади параллелограмма

$$S_{ABCD} = 4S = AD \cdot CD \cdot \sin\angle ADC \Rightarrow CD = \frac{4S}{AD \cdot \sin\angle ADC} = \frac{4 \cdot \frac{3}{2}}{3\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2}} = 2\sqrt{5}.$$

Теперь найдем диагонали AC и BD по теореме косинусов из треугольников ADC и BCD

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos\angle ADC} = \sqrt{2},$$
$$BD = \sqrt{AD^2 + CD^2 + 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos\angle ADC} = \sqrt{74}.$$

Подставив найденные значения в соотношение (1), получим $\sin\alpha = \frac{6}{\sqrt{37}}$.

Ответ: $\frac{6}{\sqrt{37}}$.

6. Найдите все простые числа, запись которых в системе счисления с основанием 14 имеет вид $101010\ldots101$ (единицы и нули чередуются).

Решение: Пусть $2n+1$ – количество цифр в исследуемом числе $A = 101010\ldots101$. Пусть $q = 14$ – основание системы счисления. Тогда $A = q^0 + q^2 + \cdots q^{2n} = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1}$. Рассмотрим случаи четного и нечетного n.

- $n = 2k \Rightarrow A = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1} = \frac{q^{2k+1}-1}{q-1} \cdot \frac{q^{2k+1}+1}{q+1}$. Таким образом, число A представлено в виде произведения двух целых сомножителей (по теореме Безу многочлен $q^{2k+1} \pm 1$ делится без остатка на многочлен $q \pm 1$), каждый из которых отличен от 1. Значит, при четных n число A простым не является.
- $n = 2k-1 \Rightarrow A = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1} = \frac{q^{2k}-1}{q^2-1} \cdot (q^{2k}+1)$. При $k > 1$ оба сомножителя целые и отличны от 1; значит, число A составное. Остается убедиться, что при $k = 1$ получается простое число $A = q^0 + q^2 = 197$.

Ответ: 197.

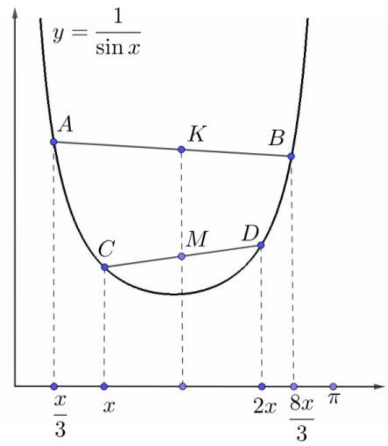
7. Докажите, что для всех $x \in \left(0,\ \frac{3\pi}{8}\right)$ справедливо неравенство:

$$\frac{1}{\sin\frac{x}{3}} + \frac{1}{\sin\frac{8x}{3}} > \frac{\sin\frac{3x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin 2x}.$$

Указание: воспользуйтесь выпуклостью вниз графика функции $f(t) = \frac{1}{\sin t}$ на интервале $(0;\ \pi)$

Решение. Выполним преобразования

$$\frac{1}{\sin\frac{x}{3}} + \frac{1}{\sin\frac{8x}{3}} > \frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\sin 2x} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin\frac{x}{3}} + \frac{1}{\sin\frac{8x}{3}} > \frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}}{\sin x \sin 2x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin\frac{x}{3}} + \frac{1}{\sin\frac{8x}{3}} > \frac{\sin 2x + \sin x}{\sin x \sin 2x} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin\frac{x}{3}} + \frac{1}{\sin\frac{8x}{3}} > \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin 2x}.$$



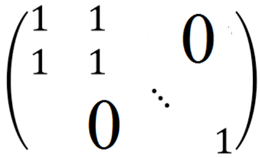
По условию $x \in \left(0,\ \frac{3\pi}{8}\right)$. Следовательно числа $\frac{x}{3}, x, 2x, \frac{8x}{3}$ лежат на интервале $(0;\ \pi)$. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{\sin x}$. Ее вторая производная $f''(x) = \frac{2\cos^2 x}{\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x}$ положительна для всех $x \in (0;\ \pi)$, значит на этом интервале функция выпукла вниз. На координатной плоскости отметим точки $A\left(\frac{x}{3}, f\left(\frac{x}{3}\right)\right), B\left(\frac{8x}{3}, f\left(\frac{8x}{3}\right)\right), C\big(x, f(x)\big)$ и $D\big(2x, f(2x)\big)$. Левая часть последнего неравенства – сумма ординат точек A и B или, что тоже самое, – удвоенная ордината точки K – середины отрезка AB. Аналогично, правая часть последнего неравенства – удвоенная ордината точки M – середины CD. Поскольку $f(x)$ выпукла вниз, весь отрезок AB расположен «выше» отрезка CD, а значит ордината точки K больше ординаты точки M. Неравенство доказано.

8. В каждую из k ячеек квадратной таблицы $n \times n$ записана единица, а в остальные ячейки – ноль. Найдите максимальное значение k, при котором, независимо от исходного расположения единиц, меняя местами строки между собой и столбцы между собой, можно добиться того, что все единицы окажутся выше побочной диагонали или на ней? (Побочной называется диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол. На рисунке приведен пример: содержимое ячеек, лежащих выше побочной диагонали или на ней, отмечено жирным.)

Решение: Таблицу размерами $n \times n$ будем обозначать $\mathbf{T}_n$. Очевидно, что для таблицы $\mathbf{T}_2$ искомое максимальное k равно 3. Экспериментируя с таблицей $\mathbf{T}_3$, можно заметить, что $k = 4$ (ниже мы докажем это строго). Сделанные наблюдения позволяют предположить, что для произвольного $n > 1$ максимальное значение k равно $n + 1$. Докажем это. Прежде всего, покажем, что $n + 2$ единицы таблица содержать не может. Для этого приведем контрпример, но сначала вспомним определение трансверсали.

0	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	0
1	**1**	0	0
0	0	0	0

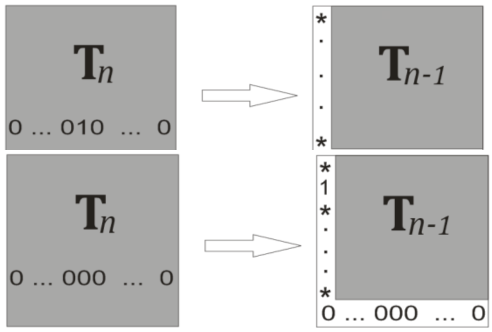
Трансверсалью таблицы $\mathbf{T}_n$ называют набор из n ячеек, содержащих 1, любые две из которых расположены в разных строках и разных столбцах. Ясно, что если какие-то ячейки образовывали трансверсаль, то и после перестановки строк или столбцов они снова образуют трансверсаль. На рисунке изображена таблица $n \times n$ с $n + 2$ единицами, расположенными на главной диагонали, а также в таблице 2×2 в левом верхнем углу. Такая таблица содержит две трансверсали. В то же время таблица, у которой все 1 лежат на или выше побочной диагонали, содержит не более одной трансверсали. Значит к требуемому в задаче виду таблица на рисунке приведена быть не может. Поэтому $k \le n + 1$.



n+2 единицы и две трансверсали

Покажем, что $n + 1$ единицу всегда можно перенести на побочную диагональ или выше. Итак, дана таблица $\mathbf{T}_n$, содержащая $0 < k \le n + 1$ единиц. В такой таблице обязательно есть строка или ровно с одной 1, или не содержащей единиц вовсе. Рассмотрим эти случаи.

- В таблице $\mathbf{T}_n$ есть строка, содержащая ровно одну 1. Поставим эту строку на последнее место. Затем, переставляя столбцы, переместим эту единственную 1 в крайний левый столбец.
- В таблице $\mathbf{T}_n$ есть строка, содержащая только нули. Поставим эту строку на последнее место. Переставляя столбцы, сделаем так, чтоб в крайнем левом столбце была хоть одна единица.



В каждом случае получена подтаблица $\mathbf{T}_{n-1}$, содержащая, по крайней мере, на одну 1 меньше, чем таблица $\mathbf{T}_n$. С таблицей $\mathbf{T}_{n-1}$ можно выполнить аналогичные преобразования. В результате за $n - 2$ шага придем к таблице $\mathbf{T}_2$, для которой уже установлено, что $k = 3$. Формула $k = n + 1$ доказана.

Ответ: $k = n + 1$ при $n > 1$ и $k = 1$ при $n = 1$.

ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

9 КЛАСС

1. Найдите сумму всех четных натуральных чисел n, у которых число делителей (включая 1 и само n) равно $\frac{n}{2}$. (Например, число 12 имеет 6 делителей: 1,2,3,4,6,12.)

Решение. Пусть каноническое разложение числа n имеет вид: $n = 2^{t_1} \cdot 3^{t_2} \cdot 5^{t_3} \cdot \dots \cdot p^{t_k}$. Тогда количество делителей числа n равно $(t_1 + 1)(t_2 + 1)(t_3 + 1) \cdots (t_k + 1)$. Из условия задачи имеем равенство

$$(t_1 + 1)(t_2 + 1)(t_3 + 1) \cdots (t_k + 1) = 2^{t_1 - 1} \cdot 3^{t_2} \cdot 5^{t_3} \cdot \dots \cdot p^{t_k}. \quad (*)$$

Заметим, что $2^{t_1-1} > t_1 + 1$ при $t_1 \geq 4$, $3^{t_2} > t_2 + 1$ при $t_2 \geq 1$, ..., $p^{t_k} > t_k + 1$ при $t_k \geq 1$. Следовательно, t_1 может принимать значения 1, 2 или 3. Подставляя указанные значения в равенство (*), найдём, что $n = 8$ или $n = 12$.

Ответ: 20.

2. Сколькими способами из первых 1000 натуральных чисел $1,2, \dots, 1000$ можно выбрать 4 числа, образующих возрастающую арифметическую прогрессию?

Решение. Найдём формулу для вычисления числа способов из первых n натуральных чисел $1,2, \dots, n$выбрать 4 числа, образующих возрастающую арифметическую прогрессию. Количество прогрессий с разностью 1 равно $n - 3$ (первый член прогрессии может принимать значения от 1 до $n - 3$ включительно), количество прогрессий с разностью 2 равно $n - 6$, ... , количество прогрессий с разностью d равно $n - 3d$. Разность d удовлетворяет неравенству $1 + 3d \leq n$(если первый член прогрессии равен 1, то ее четвертый член, $1 + 3d$, не превосходит n). Поэтому наибольшее значение разности равно $d_{max} = \left[\frac{n-1}{3}\right]$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа). Следовательно, количество прогрессий, удовлетворяющих условию задачи, равно:

$$(n - 3) + (n - 6) + \dots + (n - 3k) = \frac{(2n - 3k - 3)k}{2}, \text{где } k = d_{max}.$$

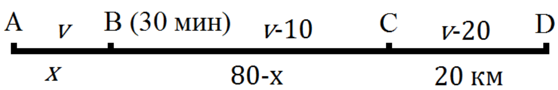
При $n = 1000$ имеем $k = 333$ и число способов равно 166167

Ответ: 166167.

3. Из пункта А в пункт D, расстояние между которыми равно 100 км, выехал автомобилист. Дорога из А в D проходит через пункты В и С. В пункте В навигатор показал, что ехать осталось 30 мин, и автомобилист тут же снизил скорость на 10 км/ч. В пункте С навигатор показал, что ехать осталось 20 км, и автомобилист сразу же второй раз снизил скорость на те же 10 км/ч. (Навигатор определяет оставшееся время на основании текущей скорости движения.) Определите первоначальную скорость автомобиля, если известно, что на путь из В в С он потратил на 5 мин больше времени, чем на путь из С в D.

Решение. По условию, расстояние от С до D равно 20 км. Обозначим расстояние от А до В через x (км), тогда расстояние от В до С составит $(80 - x)$ км.

Пусть $v \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ – первоначальная скорость автомобиля. Тогда на участках ВС и CD она равна $(v -$



$10) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и $(v - 20) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, соответственно. По условию, путь от В до D занял бы полчаса, если бы автомобиль продолжал двигаться со скоростью $v \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то есть

$$100 - x = \frac{v}{2}. \quad (1)$$

Далее, на путь из B в C он потратил на 5 мин больше времени, чем на путь из C в D:
$$\frac{80-x}{v-10}-\frac{20}{v-20}=\frac{1}{12}. \qquad (2)$$

Выразив x из первого уравнения и подставив во второе, получим уравнение для определения v:
$$\frac{\frac{v}{2}-20}{v-10}-\frac{20}{v-20}=\frac{1}{12},$$
которое имеет корни 14 и 100. Корень 14, очевидно, посторонний, так как $v>20$.

Ответ: $100\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

4. Известно, что существует натуральное число N такое, что
$\left(\sqrt{3}-1\right)^N=4817152-2781184\cdot\sqrt{3}$. Найдите N.

Решение. Предположим, что, возведя число $a+b\sqrt{3}$ в степень N, мы получили число $A+B\sqrt{3}$ (здесь a,b,A,B – целые). Раскрыв скобки в выражении $\left(a+b\sqrt{3}\right)^N$, получим сумму одночленов (с несущественными (для нас сейчас) целыми коэффициентами) вида $a^{N-n}\left(b\sqrt{3}\right)^n$. Вклад в коэффициент B дадут те одночлены, у которых показатель n нечетен. Поэтому, если $\left(a+b\sqrt{3}\right)^N=A+B\sqrt{3}$, то $\left(a-b\sqrt{3}\right)^N=A-B\sqrt{3}$. Перемножив равенства $\left(\sqrt{3}-1\right)^N=4817152-2781184\cdot\sqrt{3}$ и $\left(-\sqrt{3}-1\right)^N=4817152+2781184\cdot\sqrt{3}$, получим $(-2)^N=4817152^2-3\cdot 2781184^2$. Показатель N найдем, деля обе части последовательно на 2 (можно, например сразу поделить каждое слагаемое справа на 256).

Ответ: $N=16$.

5. В треугольнике ABC стороны $AB=4, BC=6$. Точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, при этом прямые AM и AC перпендикулярны. Найти MA, если радиус описанной вокруг треугольника ABC окружности равен 9.

Решение. Введём систему координат с началом в точке A так, чтобы точка C лежала на оси абсцисс. Из условия задачи точка M лежит на оси ординат. Введём для неизвестных координат обозначения: $\mathrm{A}(0,0), \mathrm{B}(x_B, y_B), \mathrm{C}(x_C, 0), \mathrm{M}(0, y_M)$. Обозначим через N середину AB и через O центр описанной окружности, тогда $\mathrm{N}(\frac{x_B}{2},\frac{y_B}{2})$ и $\mathrm{O}\left(\frac{x_C}{2}, y_O\right)$. Из перпендикулярности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$ следует, что $x_B\frac{x_B}{2}+y_B\left(y_M-\frac{y_B}{2}\right)=0$. Откуда, учитывая $AB^2=x_B^2+y_B^2=16$, получаем $y_M=\frac{8}{y_b}$. Из перпендикулярности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MO}$ следует, что $x_B\frac{x_C}{2}+y_B(y_M-y_O)=0$. Кроме этого $BC^2=(x_B-x_C)^2+y_B^2=36$ и $AO^2=\left(\frac{x_C}{2}\right)^2+y_0^2=81$. Этих уравнений достаточно, чтобы получить $MA=|y_M|=6$.

Ответ: 6.

10 КЛАСС

1. Найдите сумму всех кратных трем натуральных чисел n, у которых число делителей (включая 1 и само n) равно $\frac{n}{3}$. (Например, число 12 имеет 6 делителей: 1,2,3,4,6,12.).

Решение. Пусть каноническое разложение числа n имеет вид: $n = 2^{t_1} \cdot 3^{t_2} \cdot 5^{t_3} \cdot \ldots \cdot p^{t_k}$. Тогда количество делителей числа n равно $(t_1+1)(t_2+1)(t_3+1)\cdots(t_k+1)$. Из условия задачи имеем равенство:

$(t_1+1)(t_2+1)(t_3+1)\cdots(t_k+1) = 2^{t_1} \cdot 3^{t_2-1} \cdot 5^{t_3} \cdot \ldots \cdot p^{t_k}$. (*)

Заметим, что $2^{t_1}3^{t_2-1} > (t_1+1)(t_2+1)$ при $t_1 \geq 4$ и $t_2 \geq 3$, …, $p^{t_k} > t_k + 1$ при $t_k \geq 1$. Следовательно, t_1 может принимать значения 0, 1, 2 или 3 и t_2 может принимать значения 1 или 2. Подставляя указанные значения в равенство (*), найдём, что $n = 9, n = 18$ или $n = 24$.

Ответ: 51.

2. Сколькими способами из первых 1000 натуральных чисел $1,2,\ldots,1000$ можно выбрать 4 числа, образующих возрастающую арифметическую прогрессию?

Решение. Найдём формулу для вычисления числа способов из первых n натуральных чисел $1,2,\ldots,n$выбрать 4 числа, образующих возрастающую арифметическую прогрессию. Количество прогрессий с разностью 1 равно $n-3$ (первый член прогрессии может принимать значения от 1 до $n-3$ включительно), количество прогрессий с разностью 2 равно $n-6$, … , количество прогрессий с разностью d равно $n-3d$. Разность d удовлетворяет неравенству $1+3d \leq n$(если первый член прогрессии равен 1, то ее четвертый член, $1+3d$, не превосходит n). Поэтому наибольшее значение разности равно $d_{max} = \left[\frac{n-1}{3}\right]$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа). Следовательно, количество прогрессий, удовлетворяющих условию задачи, равно:

$$(n-3)+(n-6)+\cdots+(n-3k) = \frac{(2n-3k-3)k}{2}, \text{где } k = d_{max}.$$

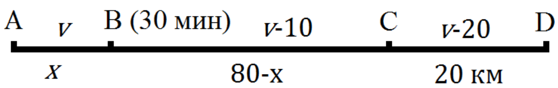
При $n = 1000$ имеем $k = 333$ и число способов равно 166167

Ответ: 166167.

3. Из пункта A в пункт D, расстояние между которыми равно 100 км, выехал автомобилист. Дорога из A в D проходит через пункты B и C. В пункте B навигатор показал, что ехать осталось 30 мин, и автомобилист тут же снизил скорость на 10 км/ч. В пункте C навигатор показал, что ехать осталось 20 км, и автомобилист сразу же второй раз снизил скорость на те же 10 км/ч. (Навигатор определяет оставшееся время на основании текущей скорости движения.) Определите первоначальную скорость автомобиля, если известно, что на путь из B в C он потратил на 5 мин больше времени, чем на путь из C в D.

Решение. По условию, расстояние от C до D равно 20 км. Обозначим расстояние от A до B через x (км), тогда расстояние от B до C составит $(80-x)$ км.

Пусть $v \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ – первоначальная скорость автомобиля. Тогда на участках BC и CD она равна $(v-$



$10) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и $(v-20) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, соответственно. По условию, путь от B до D занял бы полчаса, если бы автомобиль продолжал двигаться со скоростью $v \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то есть

$$100 - x = \frac{v}{2}. \qquad (1)$$

Далее, на путь из B в C он потратил на 5 мин больше времени, чем на путь из C в D:

$$\frac{80-x}{v-10}-\frac{20}{v-20}=\frac{1}{12}. \qquad (2)$$

Выразив x из первого уравнения и подставив во второе, получим уравнение для определения v:

$$\frac{\frac{v}{2}-20}{v-10}-\frac{20}{v-20}=\frac{1}{12},$$

которое имеет корни 14 и 100. Корень 14, очевидно, посторонний, так как $v>20$.

Ответ: 100.

4. Найдите число решений уравнения $\sin\frac{\pi n}{12}\cdot\sin\frac{\pi k}{12}\cdot\sin\frac{\pi m}{12}=\frac{1}{8}$. Здесь k, m, n – натуральные числа, не превосходящие 5.

Решение.

Пусть $1\le n\le k\le m\le 5$.

Рассмотрим случаи:

1. $n=k=m=2$. Очевидно, этот набор – решение.
2. $n=1$. Тогда заметим, что при $k=2,\ m=5$ получим верное равенство.

Функция $y=\sin x$ на промежутке $(0;\frac{\pi}{2})$ возрастает, поэтому наборы $(2;k;m)$ при $k\ge 3$ и $(1;2;3), (1;2;4); (1;3;5), (1;4;5)$ не являются решениями.

Остается убедиться, что $(1;3;4)$ не является решением.

Ответ: 7.

5. В треугольнике ABC стороны $AB=4, BC=6$. Точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, при этом прямые AM и AC перпендикулярны. Найти MA, если радиус описанной вокруг треугольника ABC окружности равен 9.

Решение. Введём систему координат с началом в точке A так, чтобы точка C лежала на оси абсцисс. Из условия задачи точка M лежит на оси ординат. Введём для неизвестных координат обозначения: $A(0,0), B(x_B, y_B), C(x_C, 0), M(0, y_M)$. Обозначим через N середину AB и через O центр описанной окружности, тогда $N(\frac{x_B}{2},\frac{y_B}{2})$ и $O\left(\frac{x_C}{2}, y_O\right)$. Из перпендикулярности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$ следует, что $x_B\frac{x_B}{2}+y_B\left(y_M-\frac{y_B}{2}\right)=0$. Откуда, учитывая $AB^2=x_B^2+y_B^2=16$, получаем $y_M=\frac{8}{y_b}$. Из перпендикулярности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MO}$ следует, что $x_B\frac{x_C}{2}+y_B(y_M-y_O)=0$. Кроме этого $BC^2=(x_B-x_C)^2+y_B^2=36$ и $AO^2=\left(\frac{x_C}{2}\right)^2+y_0^2=81$. Этих уравнений достаточно, чтобы получить $MA=|y_M|=6$.

Ответ: 6.

11 КЛАСС

1. Сколько решений уравнения $x^2 - 2x \cdot \sin(x \cdot y) + 1 = 0$ попадает в круг $x^2 + y^2 \le 100$?

Решение. Левую часть уравнения будем интерпретировать как квадратный трехчлен относительно x. Чтобы корни существовали, дискриминант должен быть неотрицательным, т.е. $D = 4sin^2(x \cdot y) - 4 \ge 0 \Leftrightarrow sin^2(x \cdot y) = 1 \Leftrightarrow \cos 2xy = -1 \Leftrightarrow xy = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Для четных n получаем уравнение $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, а для нечетных n находим $x = -1$. Левая часть уравнения – четная функция x, поэтому для $x = 1$ и для $x = -1$ соответствующие значения y будут одними и теми же. Решение имеет вид $(x, y) = \left(\pm 1, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. В круг $x^2 + y^2 \le 100$ попадает только 6 решений.

Ответ: 6.

2. Сколькими способами из первых 1000 натуральных чисел $1,2, \dots ,1000$ можно выбрать 4 числа, образующих возрастающую арифметическую прогрессию?

Решение. Найдём формулу для вычисления числа способов из первых n натуральных чисел $1,2, \dots, n$ выбрать 4 числа, образующих возрастающую арифметическую прогрессию. Количество прогрессий с разностью 1 равно $n - 3$ (первый член прогрессии может принимать значения от 1 до $n - 3$ включительно), количество прогрессий с разностью 2 равно $n - 6$, ... , количество прогрессий с разностью d равно $n - 3d$. Разность d удовлетворяет неравенству $1 + 3d \le n$(если первый член прогрессии равен 1, то ее четвертый член, $1 + 3d$, не превосходит n). Поэтому наибольшее значение разности равно $d_{max} = \left[\frac{n-1}{3}\right]$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа). Следовательно, количество прогрессий, удовлетворяющих условию задачи, равно:

$$(n - 3) + (n - 6) + \dots + (n - 3k) = \frac{(2n - 3k - 3)k}{2}, \text{где } k = d_{max}.$$

При $n = 1000$ имеем $k = 333$ и число способов равно 166167

Ответ: 166167.

3. Известно, что многочлен $f(x) = 8 + 32x - 12x^2 - 4x^3 + x^4$ имеет 4 различных действительных корня $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Многочлен вида $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + x^4$ имеет корни $\{x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2\}$. Найти коэффициент b_1 многочлена $g(x)$.

Решение: Обозначим коэффициенты заданного многочлена (кроме старшего) через a_0, a_1, a_2, a_3

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^4.$$

Тогда по условию задачи имеем

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^4 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Вместе с многочленом $f(x)$ рассмотрим многочлен $h(x)$, имеющий корни $\{-x_1, -x_2, -x_3, -x_4\}$

$$h(x) = (x + x_1)(x + x_2)(x + x_3)(x + x_4) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + x^4.$$

Рассмотрим многочлен $G(x) = f(x)h(x)$:

$$G(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x + x_1)(x + x_2)(x + x_3)(x + x_4) =$$
$$= (x^2 - {x_1}^2)(x^2 - {x_2}^2)(x^2 - {x_3}^2)(x^2 - {x_4}^2).$$

Заменой переменной $y = x^2$ получаем требуемый многочлен $g(y)$, поскольку

$$g(y) = (y - {x_1}^2)(y - {x_2}^2)(y - {x_3}^2)(y - {x_4}^2).$$

В нашем случае

$$f(x) = 8 + 32x - 12x^2 - 4x^3 + x^4,$$
$$h(x) = 8 - 32x - 12x^2 + 4x^3 + x^4,$$
$$g(x) = f(x)h(x) = 64 - 1216x^2 + 416x^4 - 40x^6 + x^8,$$

$$g(y) = 64 - 1216y + 416y^2 - 40y^3 + y^4.$$

Ответ: -1216.

4. Найдите наименьшее значение параметра a, при котором система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x-6)^2 + (y-13)^2} + \sqrt{(x-18)^2 + (y-4)^2} = 15 \\ (x-2a)^2 + (y-4a)^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение системы задает ГМТ точек $M(x, y)$ на плоскости сумма расстояниййот которых до точек $A(6,13)$ и $B(18,4)$ равна 15. Заметим, что

$$|AB| = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15.$$

Поэтому согласно неравенству треугольника, ГМТ таких точек $M(x, y)$ суть точки отрезка AB.

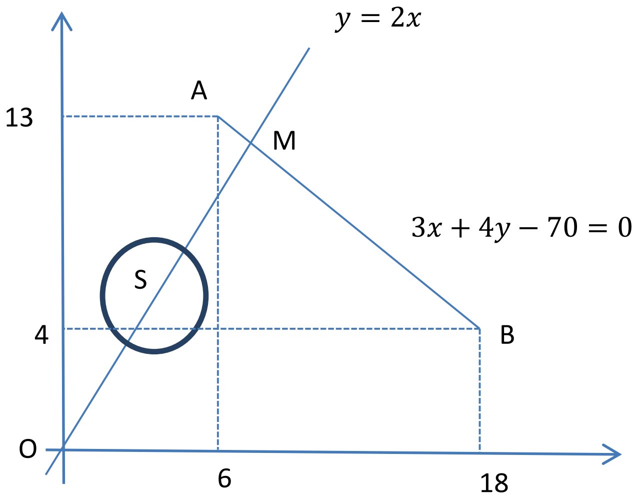
Второе уравнение есть уравнение окружности с центром в точке $S(2a, 4a)$ радиуса $\frac{1}{2}$.

Единственность решения системы возможна в том и только в том случае, когда окружность пересекает отрезок AB ровно в одной точке.

Очевидно, что гарантированно единственная точка пересечения будет в случае касания окружности отрезком. Это произойдет тогда, когда расстояние от точки $S(2a, 4a)$ до прямой, содержащей отрезок AB, будет равно радиусу окружности, и точка касания будет попадать в отрезок AB. Уравнение прямой, содержащей AB, как нетрудно установить, имеет вид $3x + 4y - 70 = 0$. Согласно формуле расстояния от точки до прямой (один из вариантов решения):

$$\frac{|3 \cdot 2a + 4 \cdot 4a - 70|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда получим два возможных значения параметра a:



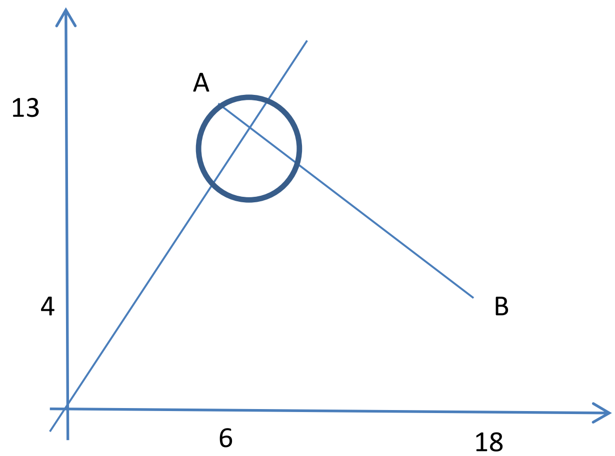
$$\left[\begin{array}{l} a = \dfrac{145}{44}, \\ a = \dfrac{135}{44}. \end{array}\right.$$

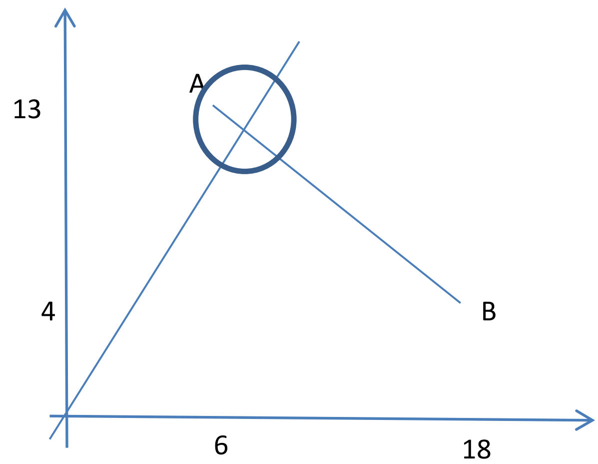
Центр окружности лежит на прямой $y = 2x$.Точка $M\left(\frac{70}{11}, \frac{140}{11}\right)$ пересечения прямых $y = 2x$ и $3x + 4y - 70 = 0$ лежит на отрезке AB. Угол OMBострый, поэтому точка касания прямой $3x + 4y - 70 = 0$

и окружности, центр которой лежит под отрезком AB, заведомо на отрезок AB попадет. Это происходит при $a=\frac{135}{44}$. Если же цент S окружности лежит выше отрезка AB (это происходит при $a=\frac{145}{44}$), то требуются дополнительные рассуждения. Точка касания Hесть проекция точки $S\left(\frac{145}{22},\frac{145}{11}\right)$на прямую, содержащую отрезок AB. H попадет в отрезок AM, если $MH\le AM$. Имеем:

$$MH=\sqrt{SM^2-SH^2}=\sqrt{\left(\frac{145}{22}-\frac{70}{11}\right)^2+\left(\frac{145}{11}-\frac{140}{11}\right)^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{11},$$

$$AM=\sqrt{\left(\frac{70}{11}-6\right)^2+\left(\frac{140}{11}-13\right)^2}=\frac{5}{11}.$$





Следовательно $MH<AM$, и точка касания H лежит на отрезке AB.

В то же время, поскольку $AM<\frac{1}{2}$, постольку единственность решения возможна, когда окружность пересекает отрезок AB, но при этом точка A попадает во внутрь круга. Так будет происходить с момента пересечения окружности и отрезка в точке A до момента повторного пересечения в той же точке A (не включая данные моменты).

Найдем такие положения точки $S(2a,4a)$, при которых расстояние от нее до точки A равно $\frac{1}{2}$. Имеем:

$$(2a-6)^2+(4a-13)^2=\frac{1}{4}.$$

Отсюда

$$\left[\begin{aligned} a&=\frac{13}{4},\\ a&=\frac{63}{20}.\end{aligned}\right.$$

Значит, при $a\in\left(\frac{63}{20},\frac{13}{4}\right)$точка пересечения будет единственна, как и решение системы уравнений.

Ответ: $135/44$.

5. В треугольнике ABC стороны $AB=4, BC=6$. Точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, при этом прямые AM и AC перпендикулярны. Найти MA, если радиус описанной вокруг треугольника ABC окружности равен 9.

Решение. Введём систему координат с началом в точке A так, чтобы точка C лежала на оси абсцисс. Из условия задачи точка M лежит на оси ординат. Введём для неизвестных координат обозначения: $A(0,0), B(x_B,y_B), C(x_C,0), M(0,y_M)$. Обозначим через N середину AB и через O центр описанной окружности, тогда $N(\frac{x_B}{2}, \frac{y_B}{2})$ и $O\left(\frac{x_C}{2}, y_O\right)$. Из перпендикулярности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$ следует, что $x_B\frac{x_B}{2} + y_B\left(y_M - \frac{y_B}{2}\right) = 0$. Откуда, учитывая $AB^2 = x_B^2 + y_B^2 = 16$, получаем $y_M = \frac{8}{y_b}$. Из перпендикулярности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MO}$ следует, что $x_B\frac{x_C}{2} + y_B(y_M - y_O) = 0$. Кроме этого $BC^2 = (x_B - x_C)^2 + y_B^2 = 36$ и $AO^2 = \left(\frac{x_C}{2}\right)^2 + y_0^2 = 81$. Этих уравнений достаточно, чтобы получить $MA = |y_M| = 6$.

Ответ: 6.